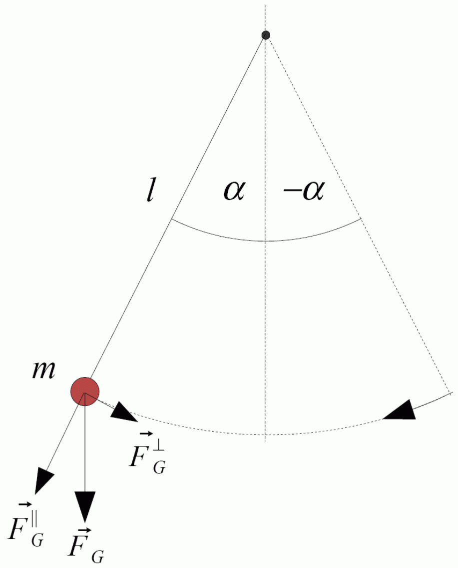
M101. Przemiany energii w ruchu wahadła.

Cel: zbadanie rzeczywistego ruchu modelu wahadła matematycznego:
- pomiar czasowej zależności: położenia wahadła $\alpha(t)$,
- obliczanie na podstawie $\alpha(t)$ czasowych zależności: prędkości $v(t)$, energii kinetycznej $E_k(t)$, energii potencjalnej $E_p(t)$, energii całkowitej $E_c(t)$,
- próba ustalenia modelu tarcia na podstawie kształtu zmian energii wahadła w czasie,
- Pomiar okresu T drgań wahadła w funkcji amplitudy drgań α_0,
- Numeryczne obliczanie zależności $T(\alpha_0)$ i porównanie z doświadczeniem.

Zagadnienia:
- ruch harmoniczny,
- równanie wahadła matematycznego w przybliżeniu małych kątów,
- II zasada dynamiki Newtona.

Wprowadzenie

Wahadło matematyczne (Rysunek 1) stanowi punktowa masa m zawieszona za pomocą nieważkiej nici liny) o długości l, wykonująca drgania okresowe wokół położenia równowagi. Ruch ten odbywa się bez oporu powietrza i bez tarcia w punkcie zaczepienia. Wahadło to jest zatem wyidealizowanym modelem rzeczywistego wahadła fizycznego.



Rysunek 1. Model wahadła matematycznego z zaznaczonymi siłami działającymi na masę.

Analizę ruchu wahadła należy oprzeć na II zasadzie dynamiki Newtona. Siłą wprawiającą wahadło w ruch jest składowa $\vec{F}_G^{\perp}$ siły grawitacji $\vec{F}_G$, styczna do łuku, po którym porusza się masa m. Jej wartość określa relacja

$$\vec{F}_G^{\perp} = -\vec{F}_G \sin(\alpha) = -mg\sin(\alpha), \tag{1}$$

gdzie g to przyspieszenie ziemskie. Z II zasady dynamiki Newtona wiemy, że siła taka wywoła ruch z przyspieszeniem chwilowym a spełniającym relację

$$ma = \vec{F}_G^{\perp}. \tag{2}$$

Uwzględniając kierunek działania siły, kinematyczną definicję przyspieszenia $a = \mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2$ oraz związek pomiędzy długością łuku i kątem wychylenia $s = l\alpha$, mamy ostatecznie

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\alpha) = 0, \tag{3}$$

Równanie (3) nie ma prostego analitycznego rozwiązania. Dopiero założenie o niewielkich wychyleniach, dla których dość dobrze spełniona jest relacja $\sin(\alpha) = \alpha$ prowadzi do dobrze znanego w fizyce równania ruchu harmonicznego

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0, \tag{4}$$

posiadającego rozwiązanie postaci

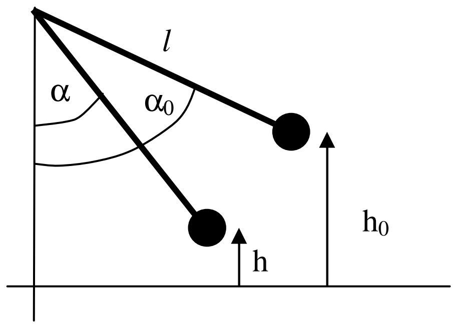
$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \delta), \tag{5}$$

gdzie α_0 jest amplitudą drgań, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ jest częstością drgań własnych wahadła, a δ jest fazą początkową jego ruchu (dla $t = 0$). Z częstości drgań można obliczyć również okres drgań wahadła w przybliżeniu małych wychyleń:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{6}$$

W ogólnym przypadku zastąpienie równania (3) przez równanie (4) nie jest uzasadnione, co oznacza, że ruch wahadła nie jest harmoniczny, a okres jego drgań jest funkcją amplitudy.

Proste numeryczne całkowanie umożliwia obliczenie okresu drgań dla konkretnej amplitudy α_0.



Rys. 2. Szkic do numerycznego wyznaczania okresu ruchu wahadła.

Przyrost energii kinetycznej przy przejściu z położenia α_0 do α równy jest różnicy energii potencjalnych w tych położeniach: $mg(h_0 - h)$. Przyjmując α_0 jako punkt startowy ($v = 0$), mamy

$$\frac{mv^2(\alpha)}{2} = mg\left(h_0 - h(\alpha)\right), \tag{7}$$

a ponieważ $h(\alpha) = l[1 - \cos(\alpha)]$, gdzie l jest długością wahadła,

$$\frac{mv^2(\alpha)}{2} = mgl\left(\cos\alpha - \cos\alpha_0\right), \tag{8}$$

czyli

$$v(\alpha) = \sqrt{2gl\left(\cos\alpha - \cos\alpha_0\right)}. \tag{9}$$

Czas potrzebny na pokonanie odcinka łuku $ds = l d\alpha$ równy jest $dt = ds/v$. Całkując dt po kącie od α_0 do 0 dostajemy ćwiartkę okresu ruchu wahadła.

$$\frac{T}{4} = \int_{\alpha_0}^{0} \frac{l d\alpha}{\sqrt{2gl\left(\cos\alpha - \cos\alpha_0\right)}}. \tag{10}$$

Proste procedury całkowania numerycznego są podane w dalszej części opisu ćwiczenia.

W ćwiczeniu tym zmierzymy rzeczywistą postać ruchu modelu wahadła matematycznego oraz zależność okresu jego drgań od ich amplitudy. Ponadto obliczenia numeryczne pozwolą obliczyć chwilowe wartości prędkości, energii kinetycznej, energii potencjalnej i energii całkowitej. Numeryczne całkowanie równania (10) pozwoli ponadto obliczyć teoretyczną wartość okresu drgań wahadła i jego zależności od ich amplitudy. Dodatkowo, numeryczne całkowanie równania (4) z uwzględnieniem tarcia powinno umożliwić określenie mechanizmu tarcia poprzez porównanie rzeczywistego ruchu wahadła z rozwiązaniem numerycznym dla różnych modeli tarcia.

Jako model wahadała matematycznego posłuży nam stosunkowo ciężki walec (ok. 0,5 kg) osadzony na lekkim płaskowniku aluminiowym o długości około 1 m. Duża bezwładność wahadła, zawieszenie na dobrej jakości łożysku kulkowym oraz niewielkie opory ruchu potencjometru służącego jako czujnik położenia sprawiają, że zestaw taki stanowi dobry model wahadła matematycznego.

Zadania do wykonania:

1. *Zmierz długość wahadła i jego masę.*
2. *Oblicz okres wahadła ze wzoru (6).*

Zestaw pomiarowy.

Wielkością mierzoną jest napięcie U mierzone na potencjometrze przymocowanym do osi obrotu wahadła. W celu wyznaczenia rzeczywistego kąta wychylenia wahadła, odpowiadającego mierzonemu napięciu U, należy zmierzyć napięcie w położeniu równowagi (U_0) oraz napięcie U_β dla dużego znanego kąta β – np. po przyłożeniu pręta wahadła do ogranicznika. Łatwo teraz przeliczyć mierzone napięcie U na kąt wychylenia α:

$$\alpha = \beta \frac{U - U_0}{U_\beta - U_0}. \tag{11}$$

Przetwornik analogowo-cyfrowy przekazuje wyniki konwersji za pośrednictwem udostępnionego zestawu podprogramów.

b) Rozwiązywanie różniczkowych równań ruchu.

Zadaniem jest rozwiązywanie równań ruchu na podstawie znajomości działającej siły. Chodzi o sukcesywne obliczanie bieżących wartości prędkości i położenia na podstawie przyspieszenia chwilowego obliczanego z II zasady dynamiki (stosunek chwilowej siły do masy). Korzystamy z przybliżenia pochodnej funkcji jako ilorazu różnicowego:

$$f(t) \approx \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t}, \tag{15}$$

czyli

$$F(t+\Delta t) = F(t) + f(t)\Delta t. \tag{16}$$

Postępując wg tego schematu najpierw dla pary przyspieszenie ($f = a$) i prędkość ($F = v$), a następnie dla pary prędkość ($f = v$), położenie ($F = x$), obliczamy położenie x jako funcję czasu. Dobierając odpowiednio małą wartość Δt, możemy uzyskać dość dokładne przybliżenie rzeczywistego ruchu ciała. W procedurze tej należy pamiętać, że dla wahadła również siła wprawiająca je w ruch jest funkcją czasu (poprzez zależność od kąta α - równanie (1)).

Zadania do wykonania:

1.Napisz program w LabView symulujący ruch wahadła matematycznego. Parametrami wejściowymi powinny być: l, g, Δt i α_0.Wynikiem powinna być wielkość typu Waveform zawierająca informację o położeniach wahadła w kolejnych chwilach czasu $t_i = i\Delta t$.Przy pisaniu odpowiednich równań pamiętaj o znakach reprezentujących zwrot poszczególnych wielkości (np. przyspieszenie zawsze skierowane przeciwnie do kierunku wychylenia).

Różniczkowanie numeryczne.

Ponownie korzystamy z przybliżenia opisanego równaniem (15), z tym, że tym razem znana jest funkcja $F(t)$, a obliczamy $f(t)$ bezpośrednio z tego równania. W obecnym ćwiczeniu różniczkowanie numeryczne będzie potrzebne do wyznaczenia chwilowych wartości prędkości wahadła.

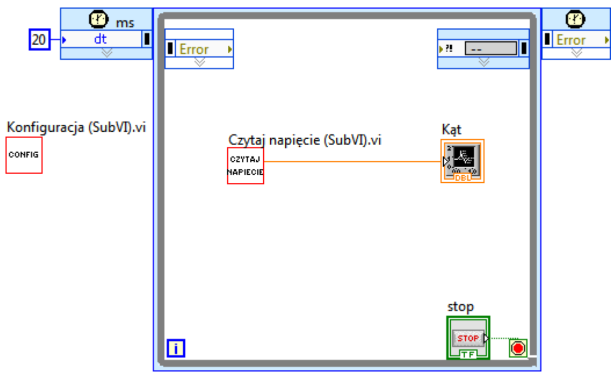
Przebieg ćwiczenia

Napisz program(y) według poniższego schematu

W palecie "Functions->User Libraries->Wahadło" znajdują się subVI'e potrzebne w komunikacji z urządzeniem pomiarowym.

1. Napisz program do ciągłego odczytu spadku napięcia na potencjometrze zamontowanym na osi wahadła. W tym celu wykorzystaj subVI'e „Konfiguracja (subVI)" oraz „Czytaj napięcie (SubVI)'. Użyj pętli „Timed Loop" („uczasowiona" pętla While) aby wykonać synchroniczny odczyt napięcia z prędkością 50 wartości/sekundę (opóźnienie 20ms). Zmierzone wartości pokazuj na wykresie WaveForm Chart

.



2. Wykorzystaj obserwowane wartości w celu dokonania przeliczenia Napięcie [V]->Kąt[rad].

   a) Korzystając z przygotowanego programu zmierz napięcie, U_0, odpowiadające pozycji spoczynkowej wahadła. Wartość ta powinna odpowiadać kątowi $\alpha=0$.

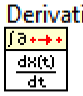
   b) Następnie zmierz wartości napięć dla wychylenia wahadła o 90 stopni w lewo (U_{+90}) i w prawo (U_{-90}), czyli dla zakresu kątów 180stopni=π. Wyznacz stałą kalibracyjną jako $C[rad/V] = \frac{\pi}{|U_{+90} - U_{-90}|}$

   c) Skorzystaj z funkcji „Normuj (SubVI)" aby przeliczać na bieżąco wartości napięci na odpowiednie wartości kątów. W tym celu wartość U_0 podaj na złącze „Przesunięcie "zera" [V]", natomiast wartość C na złącze „Stała skalująca [rad/V]".

Badanie charakteru ruchu wahadła

Wiadomo, że równanie ruchu wahadła w postaci $\alpha(t)=\alpha_0\cos(\omega t)$ zostało otrzymane w przybliżeniu małych kątów. Zmierz zależności $\alpha(t)$ (kilka okresów) dla różnych amplitud (od ok.80° do ok. 5°). Na tle zmierzonego przebiegu przedstaw funkcję $\alpha_{simul}(t)=\alpha_0\cos(\omega t)$ dobierając odpowiednio α_0 oraz ω (suwakami, lub z dopasowania narzędziem „*Extract single tone information*"). Aby wyeksponować różnice, dodaj osobny wykres przedstawiający $\alpha(t)-\alpha_{simul}(t)$.

Badanie energii mechanicznej w ruchu wahadła

1. Stworzyć funkcję (SubVI), w której obliczana będzie wartość energii potencjalnej na podstawie odczytywanych wartości kątów
   $E_p = mgL(1-\cos(\alpha))$
2. Stworzyć funkcję (SubVI), w której obliczana będzie wartość energii kinetycznej na podstawie aktualnych wartości prędkości kątowych
   $$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mL^2\omega^2=\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$
   Dla obliczenia pochodnej wykorzystaj funkcję „Derivative x(t) PtbyPt.vi" obliczającą pochodną „punkt po punkcie"
   Derivative x(t) PtByPt.vi
   

   Oprócz podania aktualnej wartości kąta (w celu obliczenia $d\alpha$, funkcja wymaga podania wartości dt. Podczas obliczania pochodnej metodą numeryczną dt oznacza Δt czyli odstęp czasu między dwoma pomiarami kąta (w obecnym przykładzie 20ms)

3. Oblicz energię całkowitą jako sumę dwóch poprzednich. Wykreślaj przebiegi wszystkich trzech wielkości. Zauważ zależności między poszczególnymi energiami. Energia potencjalna zamieniana jest na kinetyczna. Całkowita energia pozostaje stała dla niewielkich odcinków czasu. W dłuższym przedziale czasu widać wyraźnie tłumienia drgań wahadła. Wynika stąd, iż energia jest w układzie rozpraszana (tarcie łożyska, tarcie potencjometru, opór powietrza). Spróbuj określić zależność czasową dyssypacji energii (liniowa, wykładnicza?)

Badanie zależności okresu wahadła w funkcji amplitudy – $T(\alpha_0)$

1. Zarejestruj drganie wahadła poczynając od wysokich amplitud aż do prawie całkowitego zaniku oscylacji. Wartości czasów oraz kątów zbieraj do tablic i przedstaw na wykresie XY Graph w postaci $\alpha(t)$.
2. Korzystając z funkcji kursora wskaźnika XY Graph określ okres oscylacji dla danej amplitudy (kąta). W tym celu znajdź położenia maksimów (lub minimów) wychylenia.
3. Stwórz nowy program (VI). Wpisuj sczytywane pozycje kursora (wartości T i α_0) do tablic jednowymiarowych. Sporządź wykres XY przedstawiający zależność $T(\alpha_0)$.

Skomentuj otrzymany rezultat w kontekście wyniku otrzymanego dla wahadła matematycznego ($T(\alpha_0)$=const.)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

4. Oszacuj wartość okresu jaką obserwowałoby w granicy $\alpha_0 \to 0$. Korzystając z tej wartości oraz równania na okres dla wahadła matematycznego, oblicz długość wahadła. Porównaj otrzymaną wartość z rzeczywistą długością wahadła. Skomentuj wynik. Czy wartości się różnią? Jeśli tak to która wartość jest większa? Dlaczego?

Zadania dodatkowe

1. Zapoznaj się z dostarczonymi dodatkowymi materiałami.
2. Na podstawie opisu metod numerycznego całkowania dla przypadku wahadła matematycznego spróbuj zrealizować wybrane pomysły.
3. Oszacuj błąd przybliżenia badanego egzemplarza wahadła jako wahadło matematyczne. Oblicz jego okres traktując go jako wahadło fizyczne. Przyjmij dla uproszczenia, że ciężarek ma kształt kuli. Zważ wieszak.

Literatura

1. Henryk Szydłowski " Pracownia Fizyczna", Wyd. Nauk. PWN, Warszawa1994
1. David Halliday, Robert Resnick i Jearl Walker "Podstawy fizyki" Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 2003

Uwagi techniczne:

Całkowanie numeryczne

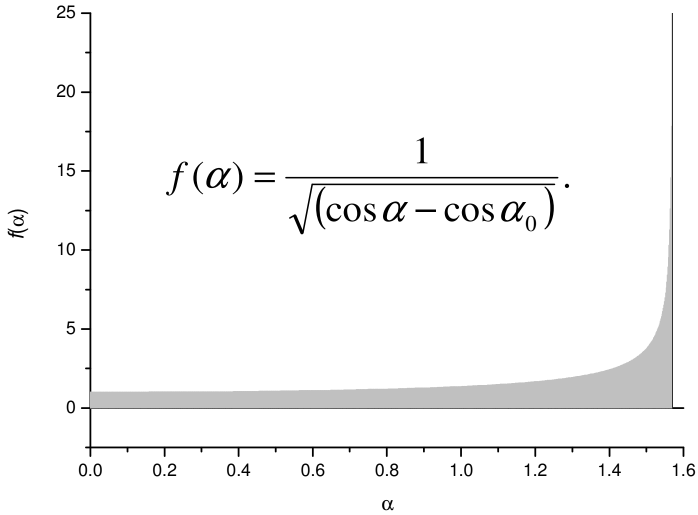
Materiał poniższy ma charakter raczej ilustracyjny i poglądowy. Podane tu metody nie są optymalne zarówno co do precyzji jak i szybkości działania. Zainteresowani mogą odwołać się do dowolnego podręcznika z metod numerycznych.

a) Całka oznaczona w skończonych granicach. Metoda trapezów.

Interpretacją geometryczną całki oznaczonej $F = \int_a^b f(x)dx$ jest pole powierzchni pod funkcją całkowaną. Dzielimy przedział całkowania <a,b> na n równych części w punktach $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n+1}$ o szerokości $\Delta x = (b-a)/n$ każda. Pole powierzchni P_i pod funkcją $f(x)$ na odcinku (x_i, x_{i+1}) równe jest w przybliżeniu polu trapezu o podstawach $f(x_i)$ i $f(x_{i+1})$ oraz wysokości Δx, czyli $P_i = [f(x_i)+f(x_{i+1})]\Delta x/2$. Stąd już łatwy wniosek, że

$$F = \left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \frac{\Delta x}{2}. \qquad (12)$$

W LabView można wykorzystać do tego gotową funkcję „Numerical Integration”, która jako argumentów wymaga tablicy z wartościami funkcji całkowanej oraz wielkości Δx. Gęstość podziału (wartość Δx) należy dobrać w zależności od szybkości zmian funkcji całkowanej. Najbezpieczniej wykonać obliczenia dla rosnącej gęstości podziału tak długo, aż wartość obliczanej całki przestanie się w istotny sposób zmieniać.



Rys. 3. Wykres fragmentu funkcji podcałkowej z równania (10). Szukana całka jest równa szaremu polu.

Tak się nieszczęśliwie składa, że funkcja podcałkowa w równaniu (10) jest nieciągła dla $\alpha = \alpha_0$ (patrz Rys. 3). Ponieważ mimo tego całka jest skończona (okres wahadła ma konkretną długość), radzimy sobie z tym zagęszczając podział przedziału i zbliżając się do α_0 tak bardzo, aż wartość całki przestanie się istotnie zmieniać. Ponieważ zagęszczanie takie nie jest potrzebne w tej części przedziału, gdzie funkcja podcałkowa jest w miarę „płaska”, proponujemy rozbicie całki na sumę całek obliczanych w rozłącznych przedziałach z różnymi gęstościami podziału. Jako punkt podziału sugerujemy 90 % wielkości przedziału. Matematycznie można to ująć następująco:

$$F = \sum_{j=1}^{N} F_j = \sum_{j=1}^{N} \int_{a_j}^{b_j} f(\alpha) d\alpha, \tag{13}$$

gdzie

$$a_1 = a, \qquad b_j = b - \frac{(b-a)}{10^j}, \qquad a_{j+1} = b_j. \tag{14}$$

Dla lepszego zrozumienia tego pomysłu, podajemy kilka wartości a_j, b_j dla $a = 0$ i $b = 1$:

j	1	2	3	4	5	6
a_j	0	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999
b_j	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	0.999999

Przyjmując podział każdego przedziału na n = 100 punktów, dobrą dokładność całki uzyskamy już dla N = 8, a więc po wykonaniu 8 x 100 = 8000 kroków. Zauważ, że zachowując gęstość podziału z ostatniego przedziału w całym obszarze całkowania, musielibyśmy wykonać 10^8 kroków.

Zadania do wykonania:
1.Napisz program w LabView obliczający okres wahadła matematycznego jako funkcję amplitudy drgań. Po wybraniu optymalnych wartości n i N nadaj mu postać sub-Vi z wejściami l, g, α_0 i wyjściem podającym wartość T.

Zasady przygotowania raportu

1. Opisz krótko badane zjawisko, problem, podając niezbędne równania.
2. Podaj cele ćwiczenia.
3. W punktach pokaż realizację poszczególnych elementów ćwiczenia. W przypadku programu pokaż jego panel frontowy i diagram blokowy (lub chociaż najważniejszą jego część) oraz omów krótko najistotniejsze punkty programu wraz z ewentualnymi trudnościami napotkanymi w ich realizacji.
4. Wyniki pomiarów przedstawiaj w sposób umożliwiający ich łatwą ocenę:
    a. pojedyncze wyniki w postaci wyróżnionych liczb (pogrubienie, większy rozmiar czcionki itp),
    b. serie kilku(nastu) wyników przedstawiaj w postaci tabel lub list. Tam gdzie to wskazane, pokaż je też na wykresie.
    c. Długie serie pomiarowe obejmujące więcej punktów zawsze prezentuj na wykresach. Osie wykresów opisane, z jednostkami. W przypadku zamieszczania kilku przebiegów na jednym wykresie konieczna jest legenda lub opis pod wykresem.
5. Jeśli to konieczne, przedyskutuj poszczególne wyniki.
6. Napisz krótkie Podsumowanie/Wnioski zawierające streszczenie swoich dokonań (najlepiej w punktach) i ewentualne uwagi na temat ćwiczenia.
7. Struktura raportu
    a. Raport musi zawierać numer i tytuł ćwiczenia, datę wykonania, datę sporządzenia raportu, nazwisko studenta (pary studentów), nazwisko prowadzącego. Najlepiej w nagłówku. Tabelka nie jest obowiązkowa, choć ułatwia życie. W przypadku programów, elementem raportu są kody programów i pliki z wynikami. W raporcie powinna znaleźć się informacja o nazwie folderu zawierającego te dane.
    b. poszczególne części raportu powinny być wyraźnie wydzielone. Tytuły części piszemy pismem pogrubionym, części mogą (nie muszą) być ponumerowane.
    c. Wszystkie wzory powinny być ponumerowane (z prawej strony).
    d. Wszystkie tabelki powinny mieć swój numer i podpis. Dla tabel podpis zawsze NAD TABELĄ.
    e. Wszystkie rysunki powinny mieć swój numer i podpis. Dla rysunków numer i podpis zawsze POD RYSUNKIEM. Przez rysunki rozumiemy wszystkie obiekty graficzne (zrzuty ekranów, zdjęcia, wykresy, schematy, itp).
    f. do równań, tabel, rysunków odwołujemy się poprzez podanie numeru (unikamy takich sformułowań jak „powyższy”, ”poniższy”, „na poprzedniej stronie”, „pierwszy”, „ostatni” itp.).