

Badanie rezonansu w obwodach prądu przemiennego

<u>Cel ćwiczenia:</u>	Poznanie podstawowych własności szeregowego obwodu rezonansowego RLC. Zbadanie wpływu zmian wartości pojemności i indukcyjności na charakterystyki częstotliwościowe układu rezonansowego.
<u>Przyrządy:</u>	Komputer PC z dwiema kartami muzycznymi, oporniki, kondensatory, cewki, przewody elektryczne
<u>Zagadnienia:</u>	Prawa przepływu przemiennego prądu elektrycznego w układach zawierających kondensatory i cewki. Drgania elektryczne i rezonans w obwodach elektrycznych
<u>Oprogramowanie:</u>	Aplikacja <i>Rezonans RLC</i> (LabVIEW)
<u>Literatura:</u>	H. Szydłowski, <i>Pracownia Fizyczna</i> , PWN, Warszawa 1989; Sz. Szczeniowski, <i>Fizyka Doświadczalna</i> , PWN, Warszawa 1980; S. Bolkowski, <i>Teoria obwodów elektrycznych</i> , WNT, Warszawa 1995

1. Wprowadzenie i metoda pomiaru

Prądem przemiennym nazywamy prąd zmieniający w czasie napięcie i natężenie w taki sposób, że ich wartość średnia w czasie jest równa zero. Prądem przemiennym jest prąd sieci elektrycznej zwany potocznie prądem zmiennym. Napięcie elektryczne można przedstawić w postaci rzeczywistej

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t) \quad (1)$$

lub w postaci zespolonej

$$u(t) = U_0 e^{j\omega t} \quad (1a)$$

a prąd elektryczny wywołany przez to napięcie odpowiednio w postaci

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (2)$$

lub

$$i(t) = I_0 e^{j(\omega t - \varphi)} \quad (2a)$$

gdzie: I , i – natężenie chwilowe, U , u – napięcie chwilowe, I_0 – natężenie szczytowe, U_0 – napięcie szczytowe, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ – częstością kołową lub pulsacją, f – częstotliwością, T – okresem, φ - różnica faz między napięciem a prądem (**przesunięcie fazowe**), $j = \sqrt{-1}$ oznacza jednostkę urojoną (w odróżnieniu od prądu i). Sens fizyczny mają jedynie części rzeczywiste równań (1a) i (2a).

Rozważmy układ złożony z tzw. elementów elektronicznych biernych, a zatem: oporu, indukcyjności oraz pojemności. Spadki napięcia na tych elementach zasilanych prądem zmiennym przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned}
 \text{Opór } R: & \quad U_R(t) = Ri(t) \\
 \text{Indukcyjność } L: & \quad U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \\
 \text{Pojemność } C: & \quad U_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i(t) dt
 \end{aligned} \tag{3}$$

Dla obwodu szeregowego zawierającego powyższe elementy, zasilanego ze źródła napięciowego o zmiennej sile elektromotorycznej reprezentowanej przez część rzeczywistą równania (1a), drugie prawo Kirchoffa przyjmuje postać:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t) \tag{4}$$

gdzie $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$ jest siłą elektromotoryczną źródła. Po podzieleniu obu stron powyższego równania przez L oraz zróżniczkowaniu względem czasu, zależność ta przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{di(t)}{dt} \right) + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{LC} \frac{d}{dt} \left(\int i(t) dt \right) = \frac{U_0}{L} \frac{d}{dt} \sin(\omega t) \tag{5}$$

Upraszczając powyższą zależność oraz wykonując następujące podstawienia:

$$2\beta = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} \tag{6}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \tag{7}$$

$$P = \frac{U_0 \omega}{L} \tag{8}$$

otrzywać można następującą postać równania (5):

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 i(t) = P \cos(\omega t) \tag{9}$$

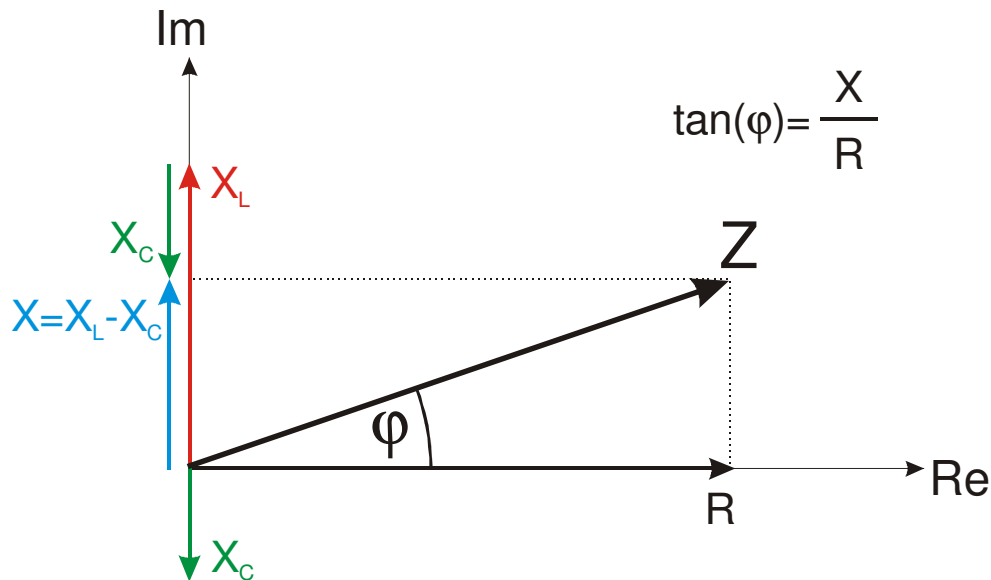
gdzie β jest współczynnikiem tłumienia powiązany z czasem relaksacji τ , ω_0 jest częstością drgań własnych układu, natomiast P jest współczynnikiem wymuszenia. Zauważmy, że wzór (9) jest równaniem różniczkowym drgań harmonicznym tłumionych, wymuszonych. Stąd obwód RLC nazywany jest również obwodem rezonansowym.

Podstawiając postaci natężenia oraz napięcia zdefiniowane równaniami (1a) i (2a) do zależności (4) otrzymujemy:

$$\frac{U}{I e^{-j\phi}} = z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \tag{10}$$

Wielkość z jest wielkością zespoloną nazywaną **impedancją** bądź **zawadą** rozpatrywanego obwodu. Wyróżnić można tu impedancję poszczególnych elementów: oporu $z_R=R$,

indukcyjności $z_L \equiv X_L = j\omega L$ oraz pojemności $z_C \equiv X_C = 1/j\omega C$. Część urojoną impedancji nazywa się **reaktancją**, natomiast część rzeczywistą **rezystancją**. Stosunek tych dwóch wielkości definiuje tangens kąta przesunięcia fazowego między napięciem a prądem.

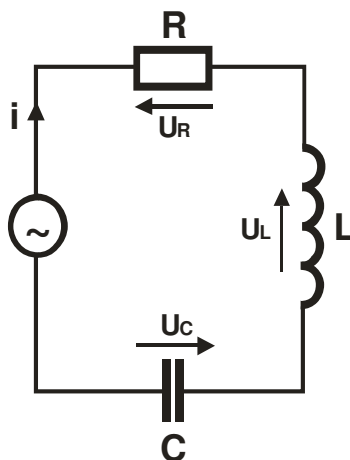


Rys. 1 Zespólona reprezentacja zawady Z.

Rezystancja charakteryzuje energię elektryczną zamienianą na ciepło. Moc traconą na oporniku R określa prawo Joula-Lenza: $P = \frac{1}{2} I_0^2 R$. Pojemność i indukcyjność charakteryzują, odpowiednio, zdolność do magazynowania energii elektrycznej w polu elektrycznym kondensatora $E_C = \frac{1}{2} C u(t)^2$ oraz w polu magnetycznym cewki $E_L = \frac{1}{2} L i(t)^2$. Stosunek energii zmagazynowanej w obwodzie rezonansowym do mocy traconej w nim w ciągu jednego okresu drgań wyraża tzw. **dobroć obwodu**

$$Q = \frac{2\pi E}{T P} \quad E = E_L = E_C. \quad (10)$$

Rezonans szeregowy (rezonans napięć)

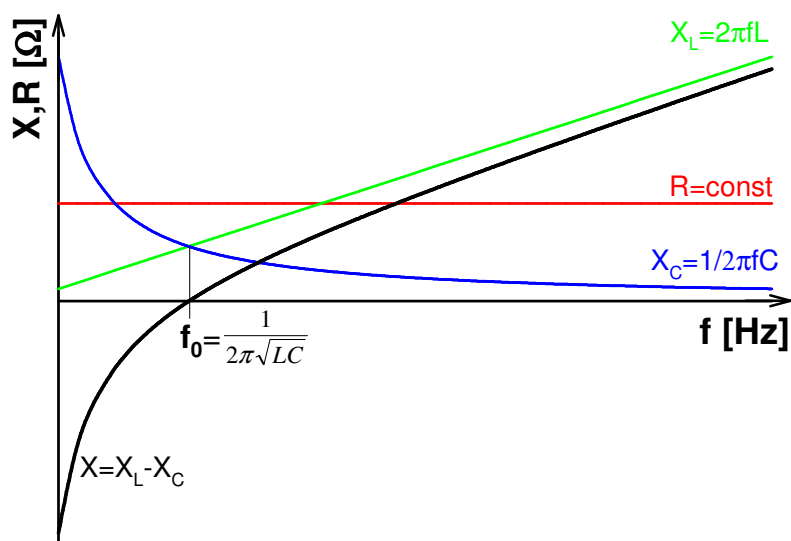


Rys.2 Szeregowy obwód RLC

Prąd zespolony, płynący w szeregowym obwodzie RLC przedstawionym na rysunku 2, wyraża się stosunkiem napięcia zespolonego do impedancji obwodu:

$$i = \frac{u}{z} = \frac{u}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (11)$$

W zależności od częstotliwości źródła w obwodzie przeważa reaktancja indukcyjna $X_L = \omega L$ bądź reaktancja pojemnościowa $X_C = 1/\omega C$. Charakterystykę częstotliwościową rezystancji i reaktancji gałęzi szeregowej RLC, przedstawiono na rysunku 3.



Rys.3 Charakterystyka częstotliwościowa rezystancji i reaktancji gałęzi szeregowej RLC

Zjawisko rezonansu napięć, występujące w gałęzi szeregowej RLC, polega na tym, że dla pewnej charakterystycznej częstotliwości f_0 , zwanej **częstotliwością rezonansową**, reaktancje indukcyjna i pojemnościowa są sobie równe (rys. 3),

$$\begin{aligned} X_L &= X_C, & X_L - X_C &= 0 \\ \omega L &= \frac{1}{\omega C} & & (12) \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}, & f_0 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \end{aligned}$$

W tym przypadku wartość impedancji obwodu wynosi:

$$Z = |z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R \quad (13)$$

czyli w stanie rezonansu obwód składający się z elementów RLC ma charakter rezystancyjny. Stosunek napięcia wyjściowego (mierzonego na oporniku R) do napięcia zasilającego, tzw. transmitancja obwodu, wynosi:

$$\frac{U_R}{U_0} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (14)$$

Kąt przesunięcia fazowego między sygnałem wejściowym i wyjściowym, wyznaczyć można z definicji zawady (rys.1)

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC} & (15) \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right) \end{aligned}$$

Jak wynika z równań (14) i (15) dla częstotliwości dużo mniejszych oraz dużo większych od częstotliwości rezonansowej, transmitancja idealnego obwodu RLC dąży do zera, podczas gdy kąt przesunięcia fazowego dąży do $-\pi/2$ ($\omega \rightarrow 0$) lub do $+\pi/2$ ($\omega \rightarrow \infty$). W chwili rezonansu transmitancja równa jest jedności, natomiast kąt przesunięcia fazowego przyjmuje wartość zerową (prąd jest w fazie z napięciem).

Równania (14) i (15) wyprowadzone zostały dla idealnego obwodu RLC, a więc przy założeniu, że cewka L zdefiniowana jest jedynie indukcyjnością (reaktancją) i nie posiada rezystancji. Rzeczywista cewka to w istocie przewód o skończonej rezystancji, którą należy uwzględnić w powyższych zależnościach. Wówczas zapisać można:

$$\frac{U_R}{U_0} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R_p}{\sqrt{(R_p + R_L)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (16)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C(R_p + R_L)}\right) \quad (17)$$

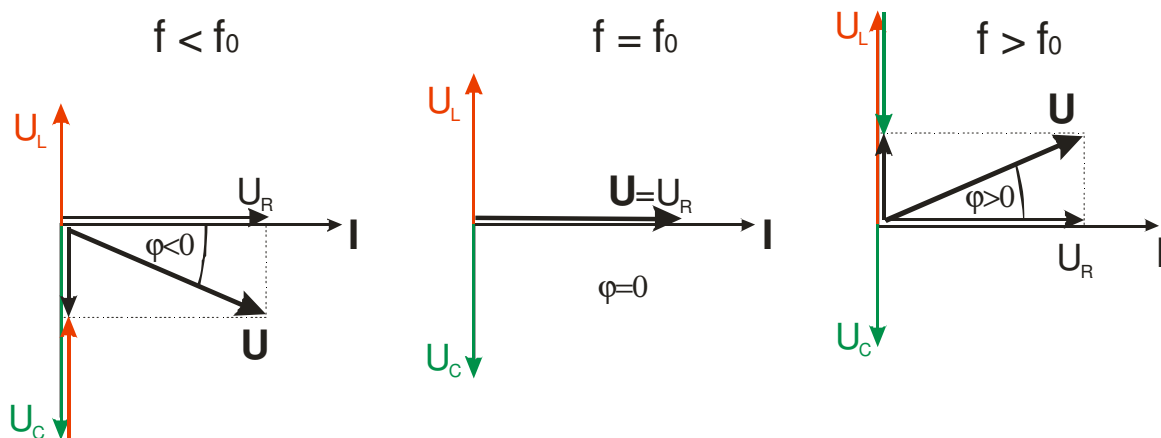
gdzie R_p jest rezystancją opornika natomiast R_L rezystancją cewki.

Z równości reaktancji indukcyjnej i pojemnościowej wynika, że napięcia na cewce U_C i kondensatorze U_L są równe co do modułu lecz przeciwne co do znaku, a zatem całkowicie się kompensują (rys. 4):

$$U_C = U_L = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (18)$$

Spadek napięcia na oporniku równy jest, w tym przypadku, wartości napięcia zasilającego

$$U_R = U_0. \quad (19)$$



Rys.4 Wykresy wskazowe dla szeregowego obwodu RLC

W stanie rezonansu dobroć układu idealnego wskazuje ile razy moduł napięcia na indukcyjności lub pojemności jest większy od modułu napięcia doprowadzonego do obwodu:

$$Q = \frac{U_C}{U_0} = \frac{U_L}{U_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (20)$$

Dla układu rzeczywistego pamiętać należy o rezystancji cewki

$$Q = \frac{1}{R_p + R_L} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (20a)$$

Dobroć elektrycznego obwodu drgającego wyznaczyć można również z poniższego wzoru:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad \Delta\omega = \omega_{g2} - \omega_{g1} \quad (21)$$

gdzie ω_0 jest częstotliwością rezonansową, dla której transmitancja obwodu osiąga najwyższą wartość, $\Delta\omega$ jest szerokością pasma przenoszenia. Pasma przenoszenia rozciąga się od ω_{g1} do ω_{g2} nazywanych częstotliwościami granicznymi, dla których zachodzą równości:

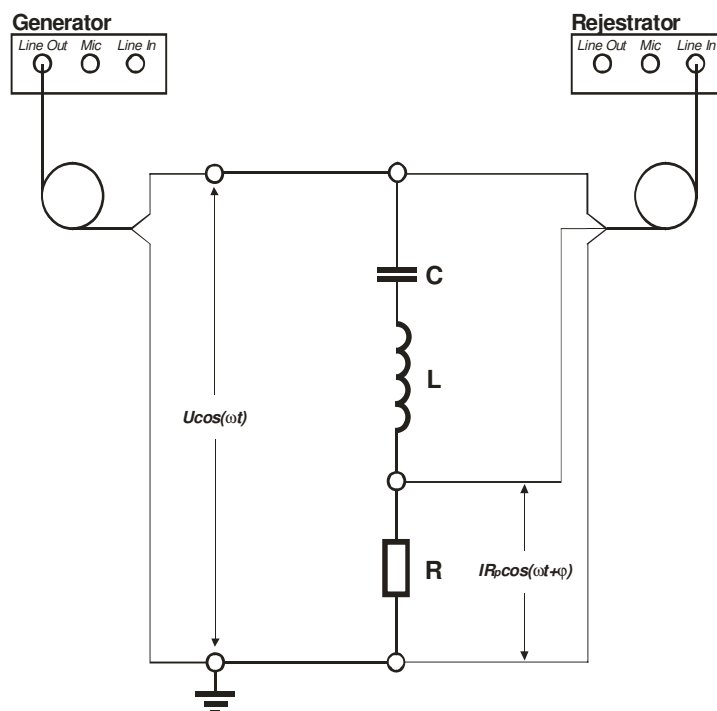
$$\frac{U_R}{U_0} = 1/\sqrt{2} \quad (22)$$

$$|\phi| = \pi/4$$

2. Przygotowanie aparatury

Za generację i rejestrację sygnałów odpowiedzialne są dwie karty muzyczne zainstalowane w komputerze wykorzystanym do pomiarów. Każda standardowa karta muzyczna posiada dwa przetworniki cyfrowo-analogowe (po jednym na każdy kanał) służące do generacji sygnału, oraz dwa przetworniki analogowo-cyfrowe służące do rejestracji sygnałów. Parametry generowanego jak i rejestrowanego sygnału zdefiniowane są parametrami wspomnianych dwóch par przetworników. W przypadku standardowej karty muzycznej sygnał próbkowany jest z częstotliwością 44,1kHz i dokładnością 16 bitów. Są to parametry pozwalające z zadowalającą dokładnością wykonać pomiary charakterystyk częstotliwościowych w zakresie od 20 – 20000Hz.

Pamiętać należy aby jedynym źródłem rejestrowanego sygnału było wejście liniowe rejestrującej karty muzycznej (Line-In). Odpowiednich ustawień można dokonać w *Panelu Sterownia* systemu operacyjnego w ustawieniach *dźwięków i urządzeń audio* (Mixer)..



Rys. 5 Schemat połączeń

Łączymy układ zgodnie ze schematem przedstawionym na rysunku 5. Układ składa się z połączonych w szereg: opornika pomiarowego R_p , cewki L i kondensatora C . Źródłem napięcia przemiennego doprowadzanego do badanego układu jest jeden z dwóch kanałów *Line Out* pierwszej karty muzycznej. Oba kanały *Line In* drugiej karty wykorzystane są w celu rejestracji napięcia na zaciskach źródła oraz spadku napięcia na oporniku pomiarowym.

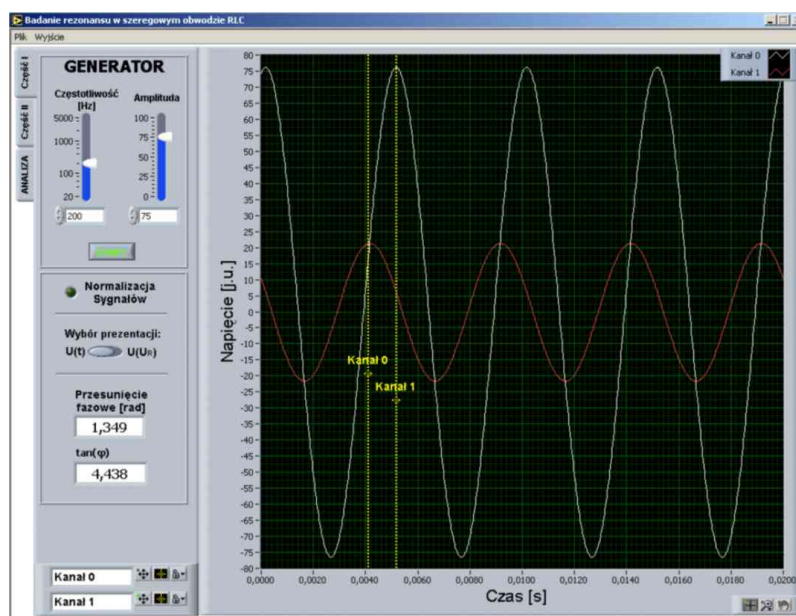
3. Pomiar

Pomiary odbywają się w dwóch etapach. Część pierwsza ma na celu zaobserwowanie zmian wartości parametrów układu szeregowego RLC (różnica faz między prądem a napięciem oraz spadek napięcia na oporniku pomiarowym) wywołanych zmianą częstotliwości napięcia zasilającego. W części drugiej badane będą częstotliwościowe charakterystyki transmitancji obwodu oraz kąta przesunięcia fazowego w celu przeanalizowania wpływu zmian wartości oporu R , indukcyjności L oraz pojemności na parametry obwodu – dobroć i częstotliwość rezonansową.

Badanie szeregowego układu RLC odbywa się przy pomocy aplikacji *Rezonans RLC* stworzonej w środowisku *LabVIEW*.

3.1. CZĘŚĆ I - Badanie przesunięcia fazowego

Ekran uruchomionej aplikacji *Rezonans RLC* przedstawiono na rysunku 6. Przycisk *START* uruchamia generator sygnału sinusoidalnego, którego częstotliwość i amplitudę zmieniać można za pomocą odpowiednich suwaków. Rejestrowane sygnały z obu kanałów karty muzycznej prezentowane są na wykresie. Zauważyć można zmianę w amplitudzie oraz fazie rejestrowanych sygnałów. Przycisk *STOP* powoduje zatrzymanie modułów



Rys. 6 Ekran Części I aplikacji *Rezonans RLC*

odpowiedzialnych za generację i rejestrację sygnału. Na tym etapie, przy pomocy kursorów widocznych na wykresie, określić można różnicę w położeniach maksimum amplitud obu sygnałów. Różnica ta prezentowana jest w postaci wartości kąta przesunięcia fazowego φ oraz jego tangensa. Jako, że zmianie ulega również amplituda sygnału, wygodnie jest

posłużyć się opcją *Normalizacji sygnałów*. Opcja *Wybór prezentacji* pozwala na przełączenie się z trybu wyświetlania $U(t)$ do trybu $U(U_R)$, czyli wykreślenia krzywej Lissajous.

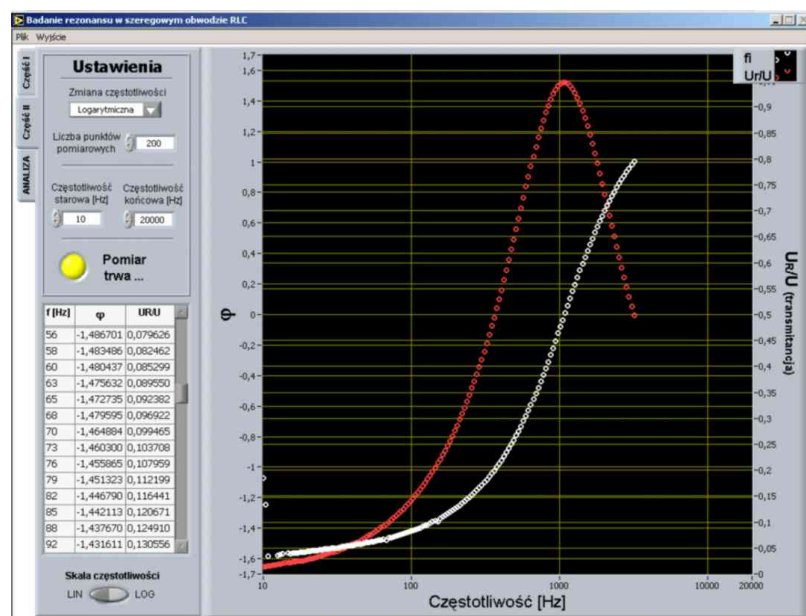
W celu zapisania zarejestrowanych sygnałów w pamięci komputera wybrać należy z menu *Plik* pole *Zapis*. Po wskazaniu lokalizacji i nazwy pliku, w wybranym folderze pojawi się plik ASCII o rozszerzeniu „*.dat”, którego pierwsza kolumna zawiera wartości czasów, natomiast dwie pozostałe zawierają wartości napięcia zasilającego oraz napięcia na oporniku R, wyrażone w jednostkach umownych.

Skopiowanie „do schowka” wykresu w wersji naturalnej (czyli dokładnie takiej jak tej widzianej na panelu aplikacji) wykonuje się „klikając” prawym klawiszem myszy na wykresie przeznaczonym do skopiowania oraz wybierając z rozwijalnego menu opcji *Copy Data*. Skopiowanie wykresu w wersji uproszczonej (wskazanej do wydruku) uzyskuje się po „kliknięciu” prawym klawiszem myszy na wykresie i wybraniu z menu wskazaniu *Export Simplified Image...* zaznaczeniu opcji *Save to Clipboard* a następnie naduszeniu przycisku *Save*.

Zadanie polega na zarejestrowaniu przebiegów napięcia zasilającego i napięcia na oporniku pomiarowym, dla układu RLC w kilku wybranych częstotliwościach. Należy zwrócić uwagę na fakt, iż w przypadku częstotliwości f niższych od częstotliwości rezonansowej f_0 prąd wyprzedza w fazie napięcie ($\varphi \rightarrow -\pi/2$) natomiast dla $f > f_0$ prąd jest opóźniony względem napięcia ($\varphi \rightarrow +\pi/2$). Otrzymane wyniki zaprezentować w postaci krzywych Lissajous. Należy odnaleźć przybliżoną częstotliwość rezonansową f_0 bazując na charakterystycznych zmianach kształtu pętli.

3.2. CZĘŚĆ II - Wyznaczenie i analiza krzywych rezonansowych

Wyznaczenie zależności częstotliwościowych transmitancji obwodu (U_R/U) oraz kąta przesunięcia fazowego φ odbywa się automatycznie. W zakładce *Część II* programu *Rezonans RLC* (rys. 7) należy wprowadzić wartości częstotliwości początkowej (nie mniejsza niż 10Hz), częstotliwości końcowej (nie większa niż 20000Hz) oraz ilość punktów przypadających na podany zakres pomiarowy. Jako, że zakres analizowanych



Rys. 7 Ekran Części II aplikacji *Rezonans RLC*

częstotliwości rozciąga się na 3 dekady, dlatego istnieje możliwość dokonania wyboru sposobu zmiany częstotliwości. Wybór z listy rozwijalnej *Zmiana częstotliwości* pola *Liniowa* bądź *Logarytmiczna* określi, czy punkty pomiarowe mają być równoodległe w skali liniowej czy też w skali logarytmicznej.

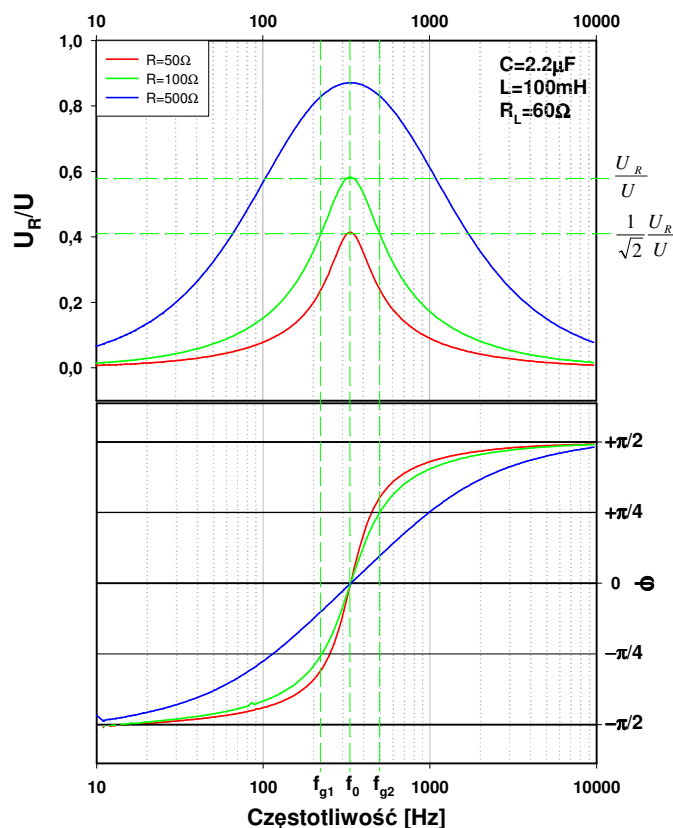
Po określeniu warunków pomiaru należy wybrać przycisk *START*. W tym momencie program rozpocznie wyznaczanie wartości U_R/U oraz φ w zakresie podanych częstotliwości. Aktualnie zmierzone wielkości pojawiają się na wykresie a ich wartości liczbowe zbierane są wewnątrz tabeli. Pomiar może zostać w każdej chwili zatrzymany ponownym wskazaniem przycisku. Po zakończeniu pomiaru zebrane dane mogą zostać zapisane w postaci pliku tekstowego po wybraniu opcji *Zapis* z menu *Plik*. Pierwsza kolumna pliku zawiera wartości częstotliwości w [Hz], kolumna druga zawiera wartości φ , natomiast trzecia wartości U_R/U . Dobrze jest, aby nazwa pliku zawierała wszystkie informacje na temat badanego układu – wartości R_p , R_L , C , L .

Zadanie polega na zarejestrowaniu wspomnianych charakterystyk częstotliwościowych dla układu RLC składającego się z wybranych przez prowadzącego oporników R_p , cewek L i kondensatorów C .

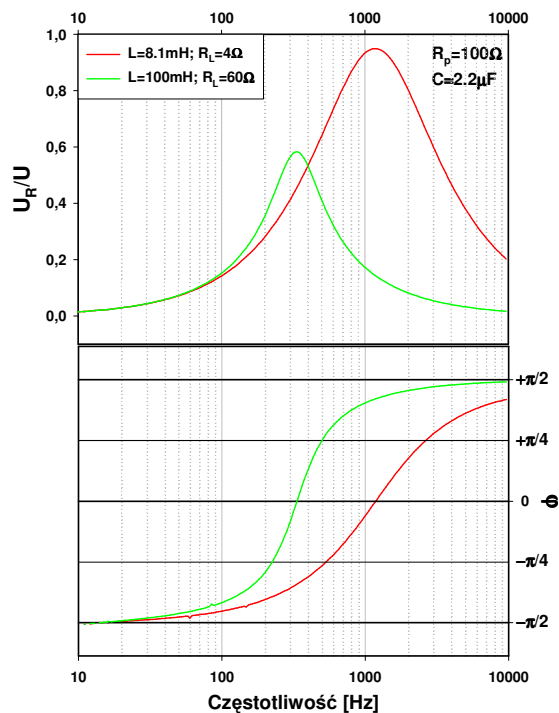
Analiza zarejestrowanych krzywych rezonansowych ma na celu wyznaczenie częstotliwości rezonansowych f_0 oraz dobroci Q . Wartość częstotliwość f_0 , odczytaną z maksimum zależności U_R/U (transmitancji) lub zerowej wartości kąta przesunięcia fazowego, należy porównać z teoretyczną wartością obliczaną z równania (11).

W celu określenia dobroci układu rezonansowego posłużyć należy się równaniem (20). Częstotliwości graniczne ω_{g1} oraz ω_{g2} należy odczytać z obu rejestrowanych krzywych (U_R/U oraz φ) posługując się równościami (21). Dobroć otrzymaną w ten sposób porównać należy z wartością teoretyczną daną równaniem (19a).

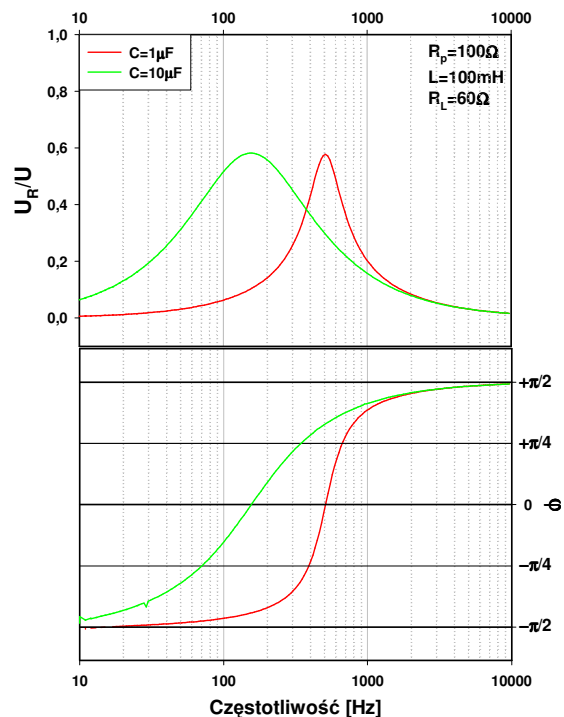
Przykładowe krzywe rezonansowe otrzymane bezpośrednio z pomiaru przedstawiono na rysunkach 8 – 10.



Rys.8 Zależności częstotliwościowe transmitancji (U_R/U) oraz kąta przesunięcia fazowego (φ) dla trzech wybranych oporników pomiarowych R_p , przy ustalonych wartościach L i C . Linie przerywane ilustrują sposób wyznaczenia częstotliwości rezonansowej f_0 oraz częstotliwości granicznych f_{g1} i f_{g2} .



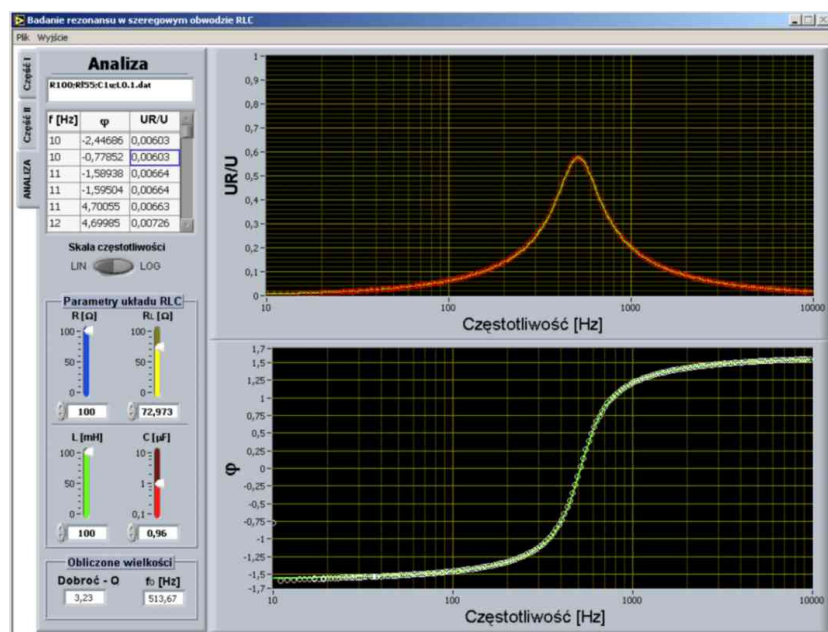
Rys.9 Zależności częstotliwościowe transmitancji (U_R/U) oraz kąta przesunięcia fazowego (φ) dla dwóch wybranych cewek, przy ustalonych wartościach R_p i C .



Rys.10 Zależności częstotliwościowe transmitancji (U_R/U) oraz kąta przesunięcia fazowego (φ) dla dwóch wybranych kondensatorów, przy ustalonych wartościach R_p i L .

3.3 ANALIZA

Zakładka *ANALIZA* (rys. 11) umożliwia wykonanie szybkiej analizy otrzymanych wyników w celu ich wstępnej weryfikacji. Z menu *Plik* należy wybrać opcję *Odczyt* i wybrać plik z wcześniej zarejestrowanymi zależnościami częstotliwościowymi U_R/U i φ . Wartości zmierzonych parametrów prezentowane są w tabeli oraz na odpowiednich wykresach. Przełącznik *Skala* częstotliwości umożliwi wybór prezentacji skali częstotliwości między skalą liniową a logarymiczną. W polu *Parametry*



Rys. 11 Ekran zakładki *ANALIZA* aplikacji *Rezonans RLC*

W polu *Parametry*

układu RLC znajdują się kontrolki (suwaki), których wartości służą do wyznaczenia modelowych zależności częstotliwościowych analizowanych wielkości. Do wyznaczenia zależności U_R/U i φ aplikacja wykorzystuje odpowiednio równania (15) i (16). Wykresy obliczonych charakterystyk prezentowane są na obu wykresach w postaci zielonych linii.

Wprowadzając do odpowiednich pól znamionowe wartości rezystancji, indukcyjności oraz pojemności odpowiednich elementów badanego układu RLC, przetestować można poprawność równań (16) i (17) opisujących zjawiska rezonansu.

Zmieniając wartości powyższych parametrów prześledzić można zarówno ich wpływ na kształt krzywych rezonansowych jak również na wartości dobroci oraz częstotliwości rezonansowej, obliczanych odpowiednio według zależności (12) i (20a) i prezentowanych w polu *Obliczone wielkości*.