D103. Wahadła fizyczne sprzężone (przybliżenie małego kąta).

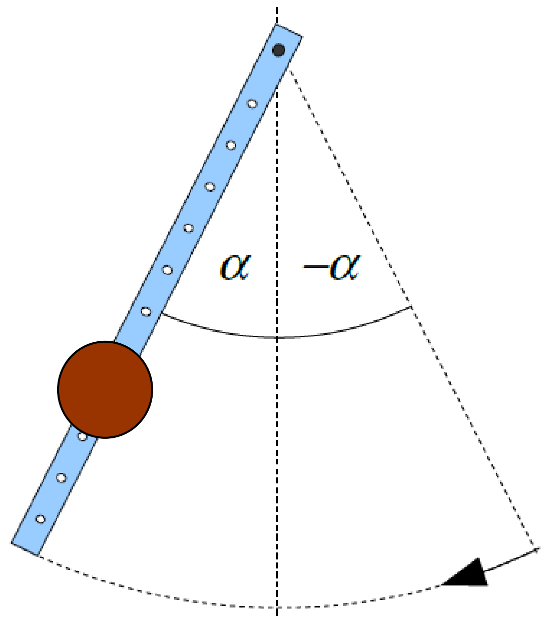
Cel: Zbadanie przebiegu drgań dwóch wahadeł sprzężonych:
- zbadanie zależności częstości drgań wahadła prostego od jego momentu bezwładności, wyznaczenie środka ciężkości wahadła,
- badanie ruchu dwóch takich samych wahadeł sprzężonych za pomocą sprężyny,
- badanie ruchu dwóch różnych wahadeł sprzężonych za pomocą sprężyny.

Zagadnienia:
1. Równanie ruchu wahadła fizycznego, częstość własna drgań, związek momentu bezwładności ciała i częstości jego drgań własnych.
2. Drgania normalne, równania drgań normalnych dla układu dwóch wahadeł sprzężonych. Składanie drgań normalnych, dudnienia.

Dostępne narzędzia doświadczalne:
1. Dwa wahadła fizyczne, do których można przymocować ciężarki. Sprężyna pozwalająca sprzęgać wahadła ze sobą.
2. Potencjometry podłączone do każdego z wahadeł w punktach ich zaczepu przekazujące odpowiednie wartości napięcia w zależności od położenia kątowego każdego z wahadeł.
3. Interfejs umożliwiający pomiar napięcia na potencjometrach za pomocą komputera.
4. Środowisko LabView, za pomocą którego można połączyć się z interfejsem pomiarowym i przeprowadzić pomiary. Odczyt napięcia z poszczególnych potencjometrów następuje poprzez użycie funkcji **Odczyt.vi** lub w postaci bardziej zaawansowanej poprzez komunikację szeregową z interfejsem pomiarowym.

Badanie drgań własnych wahadeł fizycznych

Najczęściej rozpatrywanym typem wahadła jest wahadło matematyczne, w którym zakłada się, że drgająca masa jest punktowa, a ciało (lina, nić) jakim jest ona zaczepiona do punktu zawieszenia jest pozbawione masy. Obraz ten jest oczywistym uproszczeniem rzeczywistego wahadła jakim jest wahadło fizyczne. Takimi wahadłami (Rysunek 1) są oba wahadła wykorzystywane w niżej opisanym ćwiczeniu.



Rysunek 1. Wahadło fizyczne wykorzystywane w doświadczeniu.

Wahadło fizyczne różni się tym od matematycznego, że jest sztywną bryłą obracającą się (wahającą się) wokół punktu zawieszenia znajdującego się w innym miejscu niż środek ciężkości wahadła. Chcąc opisać jego ruch musimy zatem uwzględnić moment bezwładności *I* wahadła, jak również położenie jego środka ciężkości (względem punktu zaczepienia).

II zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego ma postać:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{1}$$

gdzie $\vec{M}$ to wypadkowy moment siły działający na wahadło, a $\vec{L}$ to moment pędu jaki nadaje wahadłu przyłożony do niego moment siły. Jednocześnie $\vec{L}$ jest związany z momentem bezwładności *I* obracającej się bryły relacją:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{2}$$

gdzie $\vec{\omega}$ to wektor prędkości kątowej skierowany w tym samym kierunku i zwrócony w tę samą stronę, w którą jest zwrócony $\vec{M}$.

Powyższe wzory mogą być stosowane zarówno do wahadła fizycznego jak i matematycznego. Różnica pojawia się przy wyznaczaniu $\vec{M}$. Jedynym źródłem tego momentu jest dla obu wahadeł siła ciężkości. W przypadku wahadła matematycznego moment siły działający na nie jest zatem równy:

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}_G\right| = mgl\sin(-\alpha) = -mgl\sin(\alpha), \tag{3}$$

gdzie *m* to masa zawieszonego ciała, a *l* to jego odległość od punktu zaczepienia (długość wahadła). Znak “-” oznacza, że podobnie jak w przypadku sprężyny, moment siły działający na wahadło związany z siłą grawitacji jest skierowany tak aby przeciwdziałać wychyleniom i kierować wahadło w kierunku położenia równowagi.

W przypadku wahadła fizycznego siła ciężkości działająca na każdy fragment sztywnej bryły jest taka sama, ale różne są odległości dzielące te fragmenty od punktu zaczepienia wahadła. W efekcie moment siły działający na wahadło należy wyznaczyć jako wypadkową momentów działających na kolejne nieskończenie małe fragmenty m_i drgającego ciała. Wypadkowy moment siły będzie równy sumie wszystkich momentów składowych

$$\left|\vec{M}_g\right| = \int\left|d\vec{M}_i\right| = \int gr_i \sin(-\alpha)dm_i = -g\sin\alpha\int r_i dm_i = -D\sin\alpha \tag{4}$$

gdzie r_i to odległości kolejnych mas dm_i od punktu zaczepienia. Wielkość *D* nazywamy momentem kierującym wahadła. Wziąwszy pod uwagę, że $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$, zakładając małe wychylenia α, co pozwala założyć, że $\sin\alpha \approx \alpha$, i łącząc równania (1), (2) i (4) uzyskujemy równanie ruchu dla pojedynczego wahadła fizycznego:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{D}{I}\alpha = 0 \tag{5}$$

Zauważmy, że α jest jedynym zmiennym w czasie parametrem potrzebnym do opisu ruchu pojedynczego wahadła. Równanie (5) jest równaniem różniczkowym, którego rozwiązanie ma postać:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{6}$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{\frac{D_p}{I}}$ to tzw. częstość własna wahadła, α_0 to amplituda wychyleń, którą można wyliczyć wyznaczając prędkość kątową $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ i narzucając odpowiednie warunki początkowe (zauważ, że prędkość kątowa, a częstość własna wahadła to dwie różne wielkości fizyczne), a φ to faza początkowa drgań.

Wyznaczenie momentu bezwładności wahadła tworzonego przez pręt z otworami zobrazowany na rysunku 1 nie jest zadaniem łatwym, jednak w przybliżeniu możemy zaniedbać otwory w pręcie i wyznaczyć *I* dla pręta prostokątnego o bokach *a*, *b* i *c*. Moment bezwładności $I_ś$ takiego pręta mierzony względem osi obrotu przechodzącej przez jego środek masy, równoległej do boku *c* pręta ma postać:

$$I_{ś} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{0}^{c} (x^2 + y^2)\rho dxdydz = \frac{1}{12} m_p (a^2 + b^2) \qquad (7)$$

gdzie ρ to gęstość materiału, z którego jest zbudowany pręt. W naszym doświadczeniu pręt drga wokół punktu leżącego w odległości r od jego środka masy. Środek masy leży pośrodku jednolitego pręta, zatem r można zmierzyć i korzystając z twierdzenia Steinera wyznaczyć moment bezwładności I_p pręta względem osi przechodzącej przez punkt zaczepienia (czarne kółko na rysunku 1).

$$I_p = I_{ś} + mr^2 \qquad (8)$$

Do pręta może zostać w różnych miejscach doczepiony walcowy obciążnik. W takiej sytuacji jego moment bezwładności również należy dodać do całkowitego momentu bezwładności:

$$\begin{aligned} &I = I_p + I_w, \text{ gdzie} \\ &I_w = \frac{1}{2} m_w R_w^2 + m_w d_w^2. \end{aligned} \qquad (9)$$

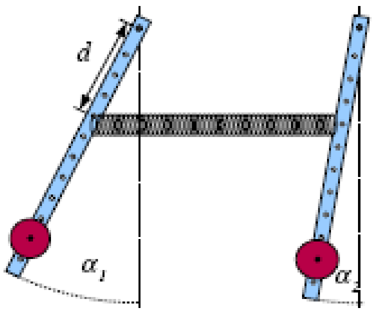
W powyższym wyrażeniu, na ostateczny całkowity moment bezwładności I pręta z ciężarkiem, m_w to masa ciężarka, R_w to jego promień, a d_w to odległość dzieląca punkt zaczepienia wahadła od środka ciężarka.

Zadania do wykonania:

1. *Korzystając z dostępnego programu, zarejestruj czasową zależność wychyleń jednego z wahadeł przy dolnym skrajnym położeniu walca. Wpraw wahadło w ruch z maksymalną dostępną amplitudą i pozwól mu się zatrzymać. Posługując się kursorami odczytaj częstotliwość f jego wahań przy różnych amplitudach α_0 i sporządź wykres $f(\alpha_0)$. Oceń przy jakiej amplitudzie α_g przybliżenie małych wychyleń jest rzeczywiście osiągane z dokładnością, którą możesz zaakceptować. Wszystkie następne pomiary wykonuj przy tej (lub mniejszej) amplitudzie α_g.*
2. *Zmieniając położenie dodatkowych walców na obu wahadłach (w jednym „idąc” od dołu, w drugim od góry) określ częstości własne wahadeł w funkcji d_w.*
3. *Zmierz wymiary prętów wahadeł, położenia otworów do zamocowania walców oraz wymiary i masę walców. Wiedząc, że moment kierujący D obciążonego wahadła jest równy sumie momentów kierujących samego wahadła i ciężarka, wyznacz teoretyczne częstości własne wahadła dla różnych położeń ciężarka i porównaj je z doświadczeniem.*

Drgania normalne

Jeżeli połączymy oba wahadła za pomocą dostępnej sprężyny tak jak to przedstawiono na rysunku 2,



Rysunek 2. Układ dwóch wahadeł sprzężonych.

wówczas utworzymy układ o dwóch stopniach swobody, którymi są kąty wychylenia obu wahadeł α_1 i α_2 (na Rysunku 2 kąty te mają znak dodatni zgodnie z konwencją określania znaku przyjętą na rysunku 1). Należy podkreślić, że sprężyna powinna zostać rozpięta tak, aby znajdowała się w położeniu równowagi dla obu wahadeł również znajdujących się w położeniu równowagi. Układ taki, zwany wahadłem sympatycznym, zachowuje się tak samo jak układ dwóch kul połączonych sprężynami ze sobą i z sąsiednimi ściankami, a te z kolei stanowią najprostszy model dwóch atomów połączonych wiązaniem wewnątrz molekuły czy kryształu.

Ruch wahadła sympatycznego, choć skomplikowany, zawsze możemy opisać jako superpozycję (złożenie) dwóch niezależnych jednoczesnych ruchów harmonicznych (ze względu na dwa stopnie swobody). Ruchy te, zwane drganiami normalnymi lub własnymi, są niezależne i jest możliwe wprawienie obu wahadeł w jeden z tych dwóch ruchów. Drganie normalne to takie, w których wszystkie współrzędne (tutaj α_1 i α_2) zmieniają się z jednakową częstością i zgodnie w fazie (lub dokładnie z przeciwną fazą). Możemy to zapisać następująco:

$$\alpha_1 = A\cos(\omega t + \delta)\,,\ \alpha_2 = B\cos(\omega t + \delta)\,. \tag{10}$$

Drgania normalne mają ściśle określone częstość i amplitudę. Zanim je wyznaczymy, musimy zdefiniować równanie ruchu dla wahadła sympatycznego, które będzie się różnić od (5) ze względu na obecność sprężyny.

W przypadku wahadeł z rysunku 2, oprócz siły grawitacji mającej swój wkład w moment siły $\vec{M}$ (4), występuje również siła sprężystości działająca w poziomie. Siła ta jest zależna od rozciągnięcia/skurczenia sprężyny, Δx, w poziomie, i jej stałej sprężystości k, $\vec{F}_s = -k\Delta\vec{x}$. Rozważmy jedno z wahadeł. Zmiana długości sprężyny względem długości, w której jest ona w równowadze zależy od wychyleń obu wahadeł zgodnie z relacją:

$$\Delta x = d\sin\alpha_2 - d\sin\alpha_1 \tag{11}$$

Moment siły sprężystości ma wartość:

$$M_s = dF_s \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_1) = -kd^2(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\cos\alpha_1 \tag{12}$$

a moment siły grawitacji przyjmuje wartości zgodnie ze wzorem (4)

$$M_G = -mgr\sin\alpha_1 \tag{13}$$

Wypadkowy moment siły będzie zatem równy sumie M_S i M_G. Uwzględniając przybliżenie małego kąta wychylenia, $\sin\alpha_1 \approx \alpha_1, \sin\alpha_2 \approx \alpha_2, \cos\alpha_1 \approx 1, \cos\alpha_2 \approx 1$, możemy wyprowadzić równania ruchu dla obu wahadeł zgodnie z tym jak postępowaliśmy poprzednio. Uzyskujemy:

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + (\omega_0^2 + H)\alpha_1 - H\alpha_2 = 0 \tag{14}$$

$$\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + (\omega_0^2 + H)\alpha_2 - H\alpha_1 = 0 \tag{15}$$

Częstość ω_0 to częstość własna każdego z wahadeł (zakładamy, że są takie same, tj. tak samo obciążone), natomiast $H = \frac{kd^2}{I}$. Równania (14) i (15) opisują ruch obu wahadeł, który może być rozłożony na składowe drgania normalne (10). Aby poznać częstości drgań normalnych i ich amplitudy wstawiamy odpowiednie postaci α_1 i α_2 z (10) do (14) i (15) i uzyskujemy układ równań:

$$\begin{aligned} &\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2 + H\right)A - HB\right]\sin\left(\omega t + \delta\right) = 0 \\ &\left[-HA + \left(\omega_0^2 - \omega^2 + H\right)B\right]\sin\left(\omega t + \delta\right) = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Układ równań (16) musi być spełniony dla każdej chwili czasu, a zatem

$$\begin{aligned} &\left(\omega_0^2 - \omega^2 + H\right)A - HB = 0 \\ &-HA + \left(\omega_0^2 - \omega^2 + H\right)B = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Układ (17) ma nietrywialne rozwiązanie gdy wyznacznik macierzy współczynników jest równy zeru.

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 + H & -H \\ -H & \omega_0^2 - \omega^2 + H \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

Równanie (18) prowadzi do równania kwadratowego:

$$\omega^4 - 2(\omega^2 + H)\omega^2 + \omega_0^4 + 4H\omega_0^2 = 0 \tag{19}$$

którego rozwiązania mają postać:

$$\omega_1 = \omega_0 \tag{20}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2H} \tag{21}$$

Po podstawieniu uzyskanych częstości (20) i (21) do równań (17) przekonamy się, że

$$\text{dla } \omega_1 = \omega_0 \quad B_1 = A_1, \tag{22}$$

$$\text{dla } \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2H} \quad B_2 = -A_2 \tag{23}$$

Wynik (22) oznacza, że jeśli oba wahadła drgają z tą samą częstością równą ich częstości własnej, wówczas poruszają się zgodnie w fazie i mają taką samą amplitudę drgań. W drugim przypadku (23) dla częstości drgań różnej od własnej, amplitudy wychyleń obu wahadeł nadal są sobie równe, lecz drgania odbywają się z przeciwnymi fazami. W ogólności amplitudy poszczególnych drgań normalnych nie muszą być sobie równe, dlatego w celu ich rozróżnienia wprowadzono przy nich indeksy.

Jak wcześniej wspomniano dowolne drgania sprzężonych wahadeł mogą zostać opisane jako superpozycja drgań normalnych. Korzystając z (10), (22) i (23) uzyskujemy

$$\alpha_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \tag{24}$$

$$\alpha_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \tag{25}$$

Drgania normalne wahadeł można uzyskać dobierając odpowiednie warunki początkowe. Dla drgania normalnego I typu (22) należy obu wahadłom nadać takie same wychylenia początkowe i wprawić je w ruch. Dla drgań II typu (23) wahadła należy wychylić w przeciwnych kierunkach i wprawić w ruch.

Zadania do wykonania:

1. *Korzystając z dostępnego programu zmierz przebiegi czasowe wychyleń dwóch sprzężonych wahadeł o znanych parametrach własnych (tj. częstościach własnych ω_0, I, D) dla kilku różnych stałych sprzężenia określonych odległością d sprężyny od osi*

obrotu.

2. *Odczytaj częstości drgań normalnych tego wahadła sympatycznego i porównaj z wartościami jakie można wyznaczyć teoretycznie.*
3. *Aby to zrobić, musisz najpierw określić doświadczalnie stałą sprężystości używanej sprężyny, k. Możesz to zrealizować używając ciężarka o znanej masie z jakiegoś innego doświadczenia, nici bądź drucika do przymocowania ciężarka do sprężyny, i linijki.*

Dudnienia

Dowolne drganie można jednoznacznie opisać biorąc pod uwagę obrane warunki początkowe. Załóżmy, że wychylamy tylko jedno wahadło tak, że jego wychylenie początkowe wynosi $\alpha_1(0)=\alpha_0$. Niech w chwili początkowej, $t = 0$, faza początkowa $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\alpha_2 = 0$, a prędkości początkowe obu wahadeł są zerowe, $\left.\frac{d\alpha_1}{dt}\right|_{(t=0)}=0$, $\left.\frac{d\alpha_2}{dt}\right|_{(t=0)}=0$. Po podstawieniu tych wartości do równań (24) i (25):

$$\alpha_1(0)=\alpha_0=A_1+A_2, \tag{26}$$

$$\alpha_2(0)=0=A_1-A_2, \tag{27}$$

Po dodaniu/odjęciu stronami równań (26) i (27) uzyskujemy $A_1=A_2=\frac{\alpha_0}{2}$. Wreszcie na koniec pozostaje nam podstawić te wartości do równań (24) i (25). Prowadzi to do następujących relacji:

$$\alpha_1=\frac{\alpha_0}{2}\left(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t\right)=\alpha_0\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \tag{28}$$

$$\alpha_1=\frac{\alpha_0}{2}\left(\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t\right)=-\alpha_0\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\,\mathrm{t}\,\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t \tag{29}$$

Jeśli podstawimy

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2}=\omega_{śr}\ ,\ \frac{\omega_1-\omega_2}{2}=\omega_{\mathrm{mod}} \tag{30}$$

wówczas uzyskamy:

$$\alpha_1=\alpha_0\cos\left(\omega_{\mathrm{mod}}t\right)\cos\left(\omega_{śr}t\right)=A_{\mathrm{mod}}(t)\cos\left(\omega_{śr}t\right)\ , \tag{31}$$

$$\alpha_2 = -\alpha_0 \sin\left(\omega_{\mathrm{mod}} t\right)\sin\left(\omega_{śr} t\right) = B_{\mathrm{mod}}(t)\sin\left(\omega_{śr} t\right). \tag{32}$$

Jak widać oba wahadła drgają z taką samą średnią częstością $\omega_{śr}$, a amplitudy ich wychyleń podlegają modulacji z częstością ω_{mod}, i są przeciwne w fazie. Zjawisko to nazywamy dudnieniami. Pojedynczy cykl, w którym wychylenia jednego wahadła ze swojej maksymalnej wartości przechodzą w wychylenia drugiego, po czym ponownie drgania wyjściowego wahadła osiągają maksymalną amplitudę nazywamy jednym dudnieniem. Czas w jakim ten proces zachodzi to okres dudnień, a jego odwrotność to częstotliwość dudnień.

Zadania do wykonania:

1. *Używając dostępnego programu zmierz przebieg czasowy dudnień układu dwóch wahadeł sprzężonych po pobudzeniu do drgań tylko jednego z nich.*
2. *Korzystając z kursorów w programie określ częstość dudnień i częstość średnią drgań wahadeł. Porównaj uzyskane wyniki z wartościami częstości drgań normalnych układu wahadeł.*

Literatura

1. Frank S. Crawford Jr “Fale”, wyd. II PWN, Warszawa 1975 - dostępne w bibliotece wydziału.
2. Henryk Szydłowski “ Pracownia Fizyczna”, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa1994 - dostępne w bibliotece wydziału.
3. Mirosław Bylicki “Wahadła sprzężone” - dostępne w internecie pod adresem http://www.phys.uni.torun.pl/~mirekb/ipf_zad_16.pdf
4. David Halliday, Robert Resnick i Jearl Walker “Podstawy fizyki” Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 2003 - dostępne w bibliotece wydziału.