

D102. Badanie **mechanicznego oscylatora tłumionego**

Cel: stworzenie aplikacji pomiarowej do badania mechanicznego oscylatora tłumionego :

- Pomiar drgań swobodnych oscylatora tłumionego
- Pomiar drgań wymuszonych (badanie rezonansu)
- Wyznaczenie i opis krzywej rezonansowej oscylatora tłumionego
- Określenie dobroci rezonatora

Wprowadzenie

Zjawisko rezonansu mechanicznego obserwujemy w przypadku drgań wymuszonych oscylatora tłumionego. Jeżeli oscylatorem jest wahadło fizyczne wówczas w układzie działa moment siły, M , proporcjonalny do wychylenia wahadła φ z położenia równowagi (dla małych φ ; $\sin(\varphi)=\varphi$) i przeciwnie skierowany :

$$M = -D\varphi, \quad (1)$$

gdzie wielkość $D=mgd$ zwana jest momentem kierującym wahadła (d jest odległością środka ciężkości od osi obrotu wahadła). Z definicji momentu siły mamy $M=I\alpha$ (I oznacza moment bezwładności wahadła, a przyspieszenie kątowe to druga pochodna wychylenia względem czasu $\alpha = d^2\varphi/dt^2$). Uwzględniając te relacje otrzymujemy różniczkową postać równania ruchu wahadła:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{I}\varphi \quad (2)$$

Równanie (2) opisuje drgania wahadła bez uwzględnienia tłumienia jego ruchu. Rozwiązanie równania (2) ma postać:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \delta) \quad (3)$$

gdzie φ_0 to wychylenie początkowe, δ określa fazę początkową ruchu, a $\omega_0 = \sqrt{D/I}$ oznacza częstość drgań własnych wahadła.

W rzeczywistości występują zazwyczaj drgania tłumione, w których amplituda maleje z czasem. Przyczynami tłumienia są opór ośrodka oraz tracie. W celu uwzględnienia wpływu oporu na ruch wahadła, po prawej stronie równania (2) uwzględnić musimy dodatkowy moment siły, M_t , proporcjonalny do prędkości ruchu. Gdy opór ośrodka jest proporcjonalny do prędkości ruchu ($M_t = -H d\varphi/dt$; H pełni rolę współczynnika lepkości), wówczas równanie ruchu przyjmuje postać:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{I}\varphi - \frac{H}{I} \frac{d\varphi}{dt} \quad (4)$$

Rozwiązanie takiego równania ma postać:

$$\varphi = A \cos(\omega_d t + \delta) \quad (5)$$

gdzie

$$A = \varphi_0 \exp(-\beta t) \quad (6)$$

jest zanikającą w czasie amplitudą drgań opisującą obwiednią drgań tłumionych. Stała zaniku, zwana współczynnikiem tłumienia, dana jest zależnością $2\beta=H/I$. Częstość drgań wahadła tłumionego, ω_d , różni się od częstości drgań własnych

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \quad (7)$$

W celu uzyskania drgań niegasnących (o niemalejącej amplitudzie) trzeba systematycznie uzupełniać straty energii. Można to osiągnąć poprzez przyłożenie dodatkowego, periodycznie zmieniającego się, wymuszającego momentu siły $M_w = M_0 \cos(\omega t)$. Wówczas równanie drgań przyjmuje postać:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{D}{I} \varphi - \frac{H}{I} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{M_0}{I} \cos(\omega t), \quad (8)$$

które zapisać można również w formie charakterystycznej dla dowolnego wymuszonego oscylatora tłumionego wykorzystując wprowadzone wcześniej symbole

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \varphi = P \cos(\omega t), \quad (9)$$

gdzie P to współczynnik wymuszenia $P = M_0/I$.

Rozwiązanie równania (8) lub (9) ma identyczną postać jak równie (5), gdzie

$$\delta = \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right), \quad (10)$$

$$A = \frac{M_0}{I} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (11)$$

Amplituda, A , drgań zależy więc od amplitudy momentu wymuszającego, M_0 , częstości drgań własnych, ω_0 , częstości momentu wymuszającego, ω , oraz od parametru tłumienia β . Najwyższą amplitudę drgań, A_{rez} , obserwuje się gdy spełniony jest warunek rezonansu, czyli gdy częstotliwość wymuszająca osiąga wartość:

$$\omega_{rez}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 \quad (12)$$

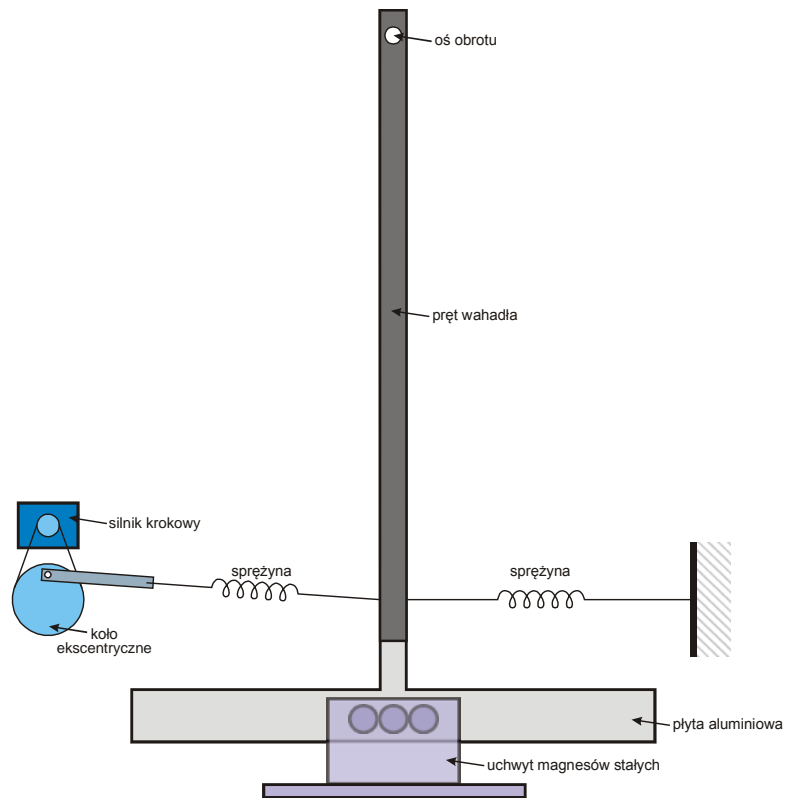
Zależność amplitudy od częstości drgań wymuszających, $A(\omega)$, nazywamy krzywą rezonansu mechanicznego. Szerokość krzywej rezonansu w istotny sposób zależy od tłumienia. Parametrem charakteryzującym tą szerokość jest dobroć układu rezonansowego, Q , zdefiniowana jako stosunek średniej energii nagromadzonej w rezonatorze do średniej pracy siły wymuszającej drgania na jeden okres drgań. Dobroć, Q , wyznaczyć można z parametrów krzywej rezonansowej:

$$Q = \frac{\omega_0}{2(\Delta\omega)_{1/2}} \quad (13)$$

gdzie $(\Delta\omega)_{1/2}$ oznacza szerokość krzywej rezonansu w połowie wysokości przedstawionej w układzie $A^2(\omega)$. W przypadku wykresu $A(\omega)$ szerokość połówkową należy mierzyć nie w połowie wysokości, lecz na poziomie $1/\sqrt{2} \approx 0.71$ maksimum krzywej.

Aparatura

Badanym oscylatorem tłumionym będzie wahadło fizyczne (Rys.1). Tłumienie wprowadzamy wykorzystując zjawisko hamowania magnetycznego. Na dole pręta wahadła zamontowano płytę aluminiową. W pobliżu płyty umieścić można uchwyt z silnymi magnesami trwałymi. Podczas ruchu wahadła, pole magnetyczne magnesów przecina przewodnik (jakim jest płyta) indukując w nim prądy wirowe (efekt Faradaya). Prądy te same stają się źródłem wtórnego pola magnetycznego, przeciwnie skierowanego do pola pierwotnego (reguła Lenza). Te dwa oddziałujące na siebie pola magnetyczne przeciwdziałają ruchowi wahadła. Zgodnie z prawem indukcji Faradaya, natężenie indukowanych prądów jest proporcjonalne do prędkości ruchu przewodnika (wahadła). Dlatego ten typ tłumika zapewnia, że siła tłumienia jest proporcjonalna do prędkości oscylatora. Wartość siły tłumienia dobrać można zmieniając odległość magnesów od płyty aluminiowej.



Rys.1

Do pomiaru drgań wahadła służy hallotronowy czujnik kąta, którego zasada działania opiera się o tzw. efekt Halla.

Siłę wymuszającą przykładamy za pośrednictwem sprężyn między którymi zamocowany jest pręt wahadła. Drgania są przekazywane do wahadła za pośrednictwem jednej ze sprężyn. Źródłem siły wymuszającej jest silnik krokowy na osi którego zamontowano koło ekscentryczne. Do zestawu doświadczenia wchodzi wielofunkcyjna karta pomiarowa NI USB-6009, która zostanie wykorzystana do sterowania napędem silnika krokowego, zbierania danych z czujnika wychylenia oraz ich przetwarzania. Program sterujący silnikiem oraz zbierający i analizujący dane doświadczalne stworzony zostanie w środowisku NI LabVIEW.

Przebieg ćwiczenia

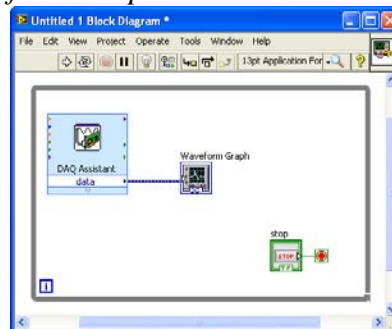
W ćwiczeniu będziemy zainteresowani wyznaczeniem krzywej rezonansu mechanicznego, czyli zależności amplitudy drgań wahadła wymuszanych siłą od zadanej częstotliwości. Gotowy program powinien mieć zatem możliwość odczytu w czasie kąta wychylenia wahadła, oraz kontrolę częstotliwości siły wymuszającej. Amplituda siły zależy od konstrukcji wahadła (stałych sprężystości sprężyn sprzęgających oraz amplitudy drgań układu ekscentrycznego) i pozostaje stała.

Przed rozpoczęciem programowania podłącz kartę pomiarową do złącza USB komputera. Podłącz również zasilanie czujnika Halla. **Na tym etapie nie podłączaj jeszcze zasilania sterownika silnika krokowego (czytaj dalej)!!!**

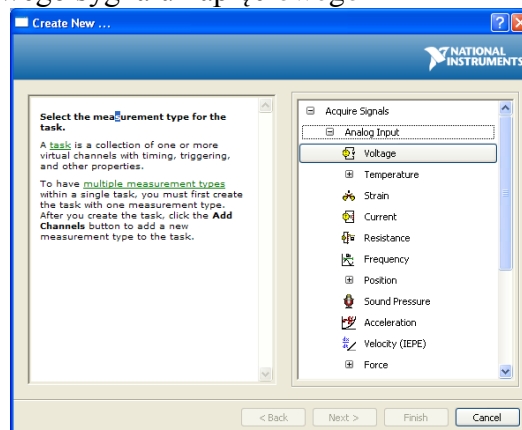
Odczyt amplitudy drgań wahadła

Pomiar kąta wychylenia wykonywany przy użyciu tzw. halotronu, czyli czujnika pozycji wykorzystującego efekt Halla. Czujnik zwraca napięcie proporcjonalne do kąta wychylenia. Odczyt tego napięcia wykonywany będzie korzystając z kart NI USB-6009.

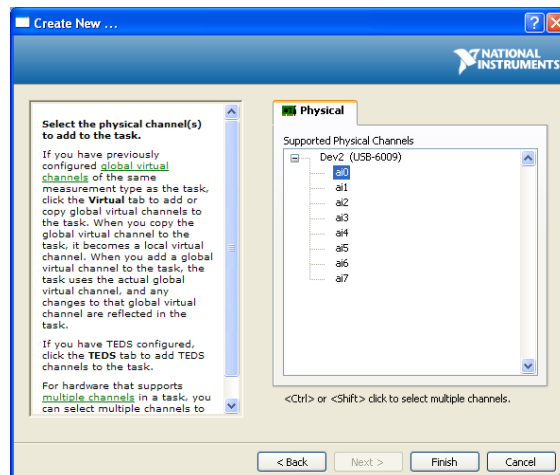
- 1) Sprawdź czy przewody z czujnika Halla są wpięte w złącza AI0 i AI4 karty NI-USB6009.
- 2) Rejestruj przebiegi czasowy napięcia na wybranym złączu analogowym wykorzystując funkcję *DAQ Assistant* umieszczonym w pętli *WHILE*. Paczki danych prezentuj na wykresie *Waveform Graph*



a) Rejestracja analogowego sygnału napięciowego



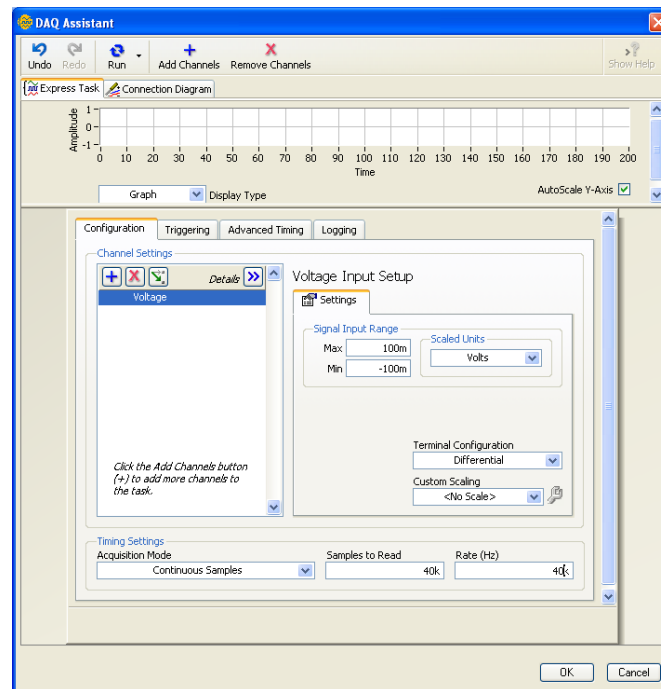
b) Wybrać kanał pomiarowy (AI0)



Czułość karty NI-USB6009 jest wystarczająca aby zarejestrować indukowany sygnał SEM bez dodatkowego wzmacniania. Spodziewamy się indukowanych napięć na poziomi mniejszym niż 1V zatem zakres pomiarowy karty warto zmniejszyć domyślny zakres pomiarowy (z +/-10V na +/-1V). W mierzonym sygnale mogą pojawiać się zakłócenia pochodzące z źródeł zewnętrznych (np. z sieci zasilającej). Aby zminimalizować zakłócenia pomiar odbywać powinien się w trybie różnicowym.

W dalszej części tworzonego programu wykorzystana zostanie funkcja (*extract single tome information.vi*) umożliwiająca wyznaczenie amplitudy i częstotliwości drgań sygnału sinusoidalnego. Funkcja ta wymaga aby w analizowanym sygnale pojawiło się kilka okresów drgań. Ze względu na okres drgań użytego wahadła, wystarczy analizować sygnał o długości ok. 5 sekund. Informacja ta potrzebna będzie do ustawienia prędkości próbkowania (*Rate*) oraz ilości sczytywanych próbek (*number of samples*) w kreatorze *DAQ Assistant*. Przy prędkości odczytu na poziomie 1000 próbek na sekundę (*Samples/second*) wystarczy sczytać 5000 próbek.

- c) Ustalić warunki pomiaru: Signal input range: +/-1V; Acquisition mode: Continuous Samples; Terminal configuration: Differential; Rate: 1000S/s; Samples to Read 5000S.



- 3) Sprawdź działanie programu zmuszając wahadło do drgań swobodnych popychając je delikatnie. Program powinien zwracać 5 sekundowe przebiegi czasowe sygnału z czujnika wychylenia.

Sygnał zbierany bezpośrednio z czujnika Halla jest nieco zaszumiały. Przed dalszą analizą warto pozbyć się niepotrzebnego zakłócenia w postaci szumu o wysokiej częstotliwości pozostawiając jedynie wolno zmienny sygnał drgającego wahadła.

- 4) Sygnał z funkcji *DAQ Assistant* prześlij do funkcji wykonującej filtrowanie: *Filter*. Typ filtru ustawić należy na dolno-przepustowy (*Low-Pass*). Częstotliwość odcięcia ustalić na ok. 100Hz. Sprawdź działanie programu.

Odfiltrowany sygnał można poddać analizie w celu wyznaczenia częstotliwości (f) i amplitudy (A) drgań wahadła

- 5) Odfiltrowany sygnał z funkcji *Filter* prześlij na funkcję *Extract single tone information.vi*. Stwórz wskaźniki na złączach *Amplitude* oraz *Frequency* funkcji *Extract...*

Aby wyrysować krzywą rezonansową dla badanego układu, pary (f, A) wykreślać należy na wskaźniku *XY Graph*.

Kontrola częstotliwości wymuszającej (prędkości silnika)

Wymuszenie drgań o wybranej częstotliwości odbywać się będzie za pośrednictwem układu ekscentrycznego (mimośrodkowego) znajdującego się na osi silnika. Wykorzystanie takiego

układu zapewnia zamianę ruchu obrotowego wału silnika na ruch oscylacyjny w płaszczyźnie drgań wahadła. Układ mimośrodowy zamocowany jest na osi silnika krokowego, którego prędkość obrotową można kontrolować napięciem podawanym na kontroler silnika. Źródłem napięcia sterującego pracą silnika będzie ponownie karta pomiarowa NI USB-6009.

- 6) Umieść drugą kopię *DAQ Assistant* wewnątrz pętli *WHILE*. Postępując analogicznie jak w punkcie 2) skonfiguruj kartę jako źródło sygnału analogowego (*Analog Output*). Jako kanał wyjściowy wybierz AO0 (przyjrzyj się podłączeniom przewodów do karty NI). Wybór *Acquisition mode* na *1 Sample On Demand* pozwoli na ustawienie pojedynczej, stałej wartości napięcia na złączu AO0. Podłącz kontrolkę numeryczną do złącza *Data* funkcji *DAQ Assistant*, za pomocą której możliwe będzie wprowadzenie wybranej wartości napięcia sterującego.

UWAGA!!! Aby silnik pozostał w bezruchu należy podać napięcie kontrolujące równe dokładnie 2.5V. Napięcia większe bądź mniejsze od tej wartości umożliwiają kontrolę kierunku obrotów silnika. W szczególności napięcie sterujące na poziomie 0V (czyli nie podłączenie go w ogóle) odpowiada maksymalnej prędkości obrotowej silnika. Z tego powodu, aby uniknąć niepotrzebnej pracy silnika, podłączenie zasilania sterownika silnika powinno odbyć się dopiero po skonfigurowaniu kanału wyjściowego karty pomiarowej i wysłaniu napięcia sterującego 2.5V.

- 7) Zmieniaj napięcie sterujące w zakresie od 0.2V – 1.4V. Aby wykreślić krzywą rezonansową dla każdej wartości napięcia sterującego (częstotliwości siły wymuszającej) zmierz parę (f, A) . UWAGA: Po zmianie częstotliwości wymuszającej układ przez chwilę znajduje się w stanie nieustalonym. Aby krzywa rezonansowa wyznaczana była poprawnie, analizę należy prowadzić na przebiegach o ustalonej amplitudzie. W tym celu najlepiej wykreślać chwilowe wartości amplitudy drgań (na wykresie *Waveform Chart*). Zapamiętywać wartości (f, A) gdy amplituda drgań już się nie zmienia.
- 8) Wykreśl zmierzoną krzywą rezonansową $A(f)$. Na ten sam wykres nanieś zależność obliczoną ze zmodyfikowanego równania (11)

$$A(f) = \frac{A_0}{\sqrt{(f_0^2 - f^2)^2 + 4\beta^2 f^2}}$$

Znajdź wielkości A_0 , f_0 i β , które najlepiej odwzorowują dane doświadczalne.

- 9) Wyznacz dobroć rezonatora, Q , korzystając z równania (13).
- 10) Wykonaj pomiar drgań swobodnych oscylatora tłumionego. Wychyl wahadło o pewien kąt początkowy, puść wahadło i poczekaj aż drgania zanikną na skutek tłumienia. Zarejestruj przebieg czasowy wychylenia, $A(t)$. W tym celu zmień parametry odczytu w funkcji *DAQ Assistant* (zwiększ liczbę sczytywanych próbek aby czas pomiaru był odpowiednio długi). Spróbuj opisać obwiednię drgań tłumionych równaniem (6)

$$A(t) = \varphi_0 \exp(-\beta t)$$

Spróbuj porównać wartość współczynnika β z otrzymaną w poprzednim zadaniu

- 11) Porównaj analityczną postać równania (9) z równaniem opisującym zjawisko rezonansu w obwodach elektrycznych zawierających elementy rezystancyjne (R), indukcyjne (L) i pojemnościowe (C) (opis doświadczenia „Badanie rezonansu w obwodach prądu przemiennego”- równanie (9)). Przyjrzyj się obu zależnościom. Dostrzeż analogie. Podaj inne zjawiska podlegające opisowi równaniem (9).